ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

HOÀNG THỊ THƯƠNG

XẤP XỈ KHÔNG ĐIỂM CHUNG CỦA HAI TOÁN TỬ j-ĐƠN ĐIỆU TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 60 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2017

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trương Minh Tuyên, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, các thầy, cô giáo trong khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường.

Tôi xin chân thành cảm ơn các học viên trong lớp Cao học Toán K9A và các bạn đồng nghiệp về sự động viên, khích lệ cũng như trao đổi về chuyên môn trong suốt quá trình tôi học tập, nghiên cứu và hoàn thiện luận văn.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$Fix(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
$o(t)$	vô cùng bé bậc cao hơn t

Mở đầu

Bài toán xác định không điểm của toán tử j-đơn điệu có ý nghĩa quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, như khoa học vật lí, tối ưu hóa, toán kinh tế, toán tài chính... Ở đây, ta quan tâm đến bài toán sau:
Xác định một phần tử $x^* \in E$ sao cho:

$$0 \in A(x^*), \tag{0.1}$$

trong đó $A: \ E \longrightarrow 2^E$ là một toán tử j-đơn điệu xác định trên không gian Banach E. Ta biết rằng khi E là không gian Hilbert thì toán tử j-đơn điệu được gọi là toán tử đơn điệu.

Khi $A: \ H \longrightarrow 2^H$ một toán tử đơn điệu cực đại trên không gian Hilbert H, thì R. T. Rockafellar [24] đã đề xuất phương pháp điểm gần kề để xác định dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_n \in c_n A x_{n+1} + x_{n+1}, \ x_0 \in H, \tag{0.2}$$

ở đây $c_n > c_0 > 0$. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp lặp (0.2) chỉ thu được sự hội tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ về một không điểm của A.

Trong những năm gần đây, xuất phát từ một số mô hình toán thực tế trong tối ưu hóa và vật lý, bài toán tìm không điểm của tổng của hai toán tử đơn điệu cực đại hay bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu và tổng quát hơn là bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử kiểu đơn điệu, đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Năm 2005, H. H. Bauschke, P. L. Combettes và S. Reich [4] đã đề xuất kết hợp phương pháp điểm gần kề và phương pháp lặp luân phiên cho bài toán xác định không điểm của hai toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert. Tuy nhiên, họ chỉ thu được sự hội tụ yếu. Năm 2016 các tác giả J.K. Kim và T.M. Tuyên đã cải tiến phương pháp lặp luân phiên của Bauschke, P. L. Combettes và S. Reich dựa trên phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp lặp Halpern [12].

Mục đích của luận văn này là trình bày lại các kết quả của J.K. Kim và T.M. Tuyên trong tài liệu [12] cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j-đơn điệu trong không gian Banach.

Nội dung chính của luận văn được chia làm hai chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi đề cập đến một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach, một số phương pháp tìm không điểm của toán tử kiểu đơn điệu (phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm) và một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng trong chứng minh các định lý chính được đề cập ở chương 2 của luận văn.

Chương 2. Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j-đơn điệu

Chương này trình bày lại kết quả của J.K. Kim và T.M. Tuyên trong tài liệu [12] về phương pháp lặp luân phiên kết hợp với phương pháp lặp Halpern cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j-đơn điệu trong không gian Banach, cùng với các ứng dụng của nó. Ngoài ra, chúng tôi cũng xây dựng một ví dụ số đơn giản nhằm minh họa thêm cho phương pháp.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao bồm 3 mục, trong đó: Mục 1.1 giới thiệu sơ lược về một số đặc trưng cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach. Mục 1.2 đề cập đến một số phương pháp tìm không điểm của toán tử j-đơn điệu, bao gồm phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm. Mục 1.3 trình bày một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng đến trong chứng minh các định lý được đề cập trong Chương 2 của luận văn.

1.1. Một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach

Cho E là một không gian Banach và E^* là không gian đối ngẫu của nó. Để cho đơn giản và thuận tiện hơn, chúng tôi thống nhất sử dụng kí hiệu $\|.\|$ để chỉ chuẩn trên E và E^* trong toàn bộ luận văn.

Trong luận văn này, chúng tôi thường xuyên sử dụng tính chất dưới đây của không gian Banach phản xạ.

Mệnh đề 1.1. (xem [1] trang 41) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) *E là không gian phản xạ.*

ii) *Mọi dãy bị chặn trong E, đều có một dãy con hội tụ yếu.*

Tiếp theo, trong mục này chúng tôi đề cập đến một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học các không gian Banach, như: tính lồi, tính trơn, mô đun lồi, mô đun trơn ...

Định nghĩa 1.1. Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in E, x \neq y$ mà $\|x\| = 1,\ \|y\| = 1$ ta có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Chú ý 1.1. Định nghĩa 1.1 còn có thể phát biểu dưới các dạng tương đương sau: Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_E$ thỏa mãn $\dfrac{\|x+y\|}{2} = 1$, suy ra $x = y$ hoặc với mọi $x, y \in S_E$ và $x \neq y$ ta có $\|tx + (1-t)y\| < 1$ với mọi $t \in (0, 1)$, trong đó

$$S_E = \{x \in E :\ \|x\| = 1\}.$$

Định nghĩa 1.2. Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E$ mà $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon$ ta luôn có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Dễ thấy rằng nếu E là một không gian Banach lồi đều thì nó là không gian Banach lồi chặt. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng, ví dụ dưới đây chỉ ra điều đó.

Ví dụ 1.1. (xem [1] trang 54) Xét $E = c_0$ (không gian các dãy số hội tụ về không) với chuẩn $\|.\|_\beta$ xác định bởi

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i^2}\right)^{1/2},\ x = (x_i) \in c_0.$$

Khi đó, $(E, \|.\|_\beta)$, $\beta > 0$ là một không gian lồi chặt nhưng không là không gian lồi đều.

Để đo tính lồi của không gian Banach E, người ta đưa vào khái niệm sau: Mô đun lồi của không gian Banach E là hàm số

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

Nhận xét 1.1. Mô đun lồi của không gian Banach E là hàm số xác định, liên tục và tăng trên đoạn $[0;2]$. Không gian Banach E lồi chặt khi và chỉ khi $\delta_E(2) = 1$ (xem [1] trang 59). Ngoài ra, không gian Banach E là lồi đều khi và chỉ khi $\delta_E(\varepsilon) > 0,\ \forall \varepsilon > 0$ (xem [1] trang 60).

Mệnh đề 1.2. (xem [1] trang 56) *Mọi không gian Banach lồi đều bất kì là không gian phản xạ.*

Định nghĩa 1.3. Không gian Banach E được gọi là trơn nếu với mỗi $x \in S_E$, tồn tại duy nhất $f_x \in E^*$ sao cho $\langle x, f_x \rangle = \|x\|$ và $\|f_x\| = 1$.

Định nghĩa 1.4. Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn. Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux tại điểm $x \in S_E$ nếu với mỗi $y \in S_E$, tồn tại giới hạn

$$\frac{d}{dt}(\|x + ty\|)_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}. \tag{1.1}$$

Định nghĩa 1.5. Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn. Khi đó:

a) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux nếu nó khả vi Gâteaux tại mọi $x \in S_E$.

b) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mọi $y \in S_E$ giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x \in S_E$.

c) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Fréchet nếu với mọi $x \in S_E$, giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $y \in S_E$.

d) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Fréchet đều nếu giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x,\ y \in S_E$.

Định lý 1.1. (xem [1] trang 92) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

a) *Nếu E^* là không gian lồi chặt thì E là không gian trơn.*

b) *Nếu E^* là không gian trơn thì E là không gian lồi chặt.*

Định nghĩa 1.6. Mô đun trơn của không gian Banach E là hàm số xác định bởi

$$\rho_E(\tau) = \sup\{2^{-1}\big(\|x + y\| + \|x - y\|\big) - 1 :\ \|x\| = 1,\ \|y\| = \tau\}.$$

Nhận xét 1.2. Mô đun trơn của không gian Banach E là hàm số xác định, liên tục và tăng trên khoảng $[0; +\infty)$ (xem [1] trang 95).

Ví dụ 1.2. [1] Nếu E là không gian l^p hoặc $L^p(\Omega)$, thì ta có

$$\rho_E(\tau) = \begin{cases} (1+\tau^p)^{1/p} - 1 < \dfrac{1}{p}\tau^p, \ 1 < p < 2, \\ \dfrac{p-1}{2}\tau^2 + o(\tau^2) < \dfrac{p-1}{2}\tau^2, \ p \geq 2. \end{cases} \tag{1.2}$$

Định lý dưới đây cho ta biết về mối liên hệ giữa mô đun trơn của không gian Banach E với mô đun lồi của E^* và ngược lại.

Định lý 1.2. (xem [8] trang 70) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó ta có*

a) $\rho_{X^*}(\tau) = \sup\{\dfrac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon) : \ \varepsilon \in [0,2]\}, \ \tau > 0.$

b) $\rho_X(\tau) = \sup\{\dfrac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon) : \ \varepsilon \in [0,2]\}, \ \tau > 0.$

Nhận xét 1.3. Từ Định lý 1.2, suy ra

$$\rho_0(E) = \frac{\varepsilon_0(E^*)}{2} \text{ và } \rho_0(E^*) = \frac{\varepsilon_0(E)}{2},$$

trong đó $\varepsilon_0(E) = \sup\{\varepsilon : \ \delta_E(\varepsilon) = 0\}, \ \rho_0(E) = \lim_{\tau\to 0} \dfrac{\rho_E(\tau)}{\tau}$.

Định nghĩa 1.7. Không gian Banach E được gọi là trơn đều nếu

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau} = 0.$$

Từ Nhận xét 1.3, ta có định lý dưới đây:

Định lý 1.3. (xem [8] trang 70) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

a) *Nếu E là không gian trơn đều thì E^* là không gian lồi đều;*

b) *Nếu E là không gian lồi đều thì E^* là không gian trơn đều.*

Ví dụ 1.3. Mọi không gian Hilbert, không gian l^p hay $L^p(\Omega)$ với $1 < p < +\infty$ đều là không gian Banach lồi đều và trơn đều (xem [1]).